Équations différentielles linéaires du premier et du second ordre

1. Équations du premier ordre

Une équation du premier ordre est une équation du type (e) : $y' - ay = 0$ où a est une constante réelle et y une fonction dérivable.
De façon évidente la fonction $x \mapsto y(x) = k\, e^{ax}$ est solution de l'équation.
Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres on peut utiliser la méthode de la variation de la constante qui consiste, puisque e^{ax} est toujours non nul, à chercher la solution de (e) sous la forme générale $x \mapsto y(x) = k(x)\, e^{ax}$ où k est une fonction dérivable. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}(e) &\Leftrightarrow k'(x)e^{ax} + k(x)ae^{ax} - ak(x)e^{ax} = 0 \\ &\Leftrightarrow k'(x)e^{ax} = 0 \\ &\Leftrightarrow k'(x) = 0\end{aligned}$$

$x \mapsto k(x)$ est par conséquent une fonction constante, $x \mapsto y(x) = ke^{ax}$ sont donc les seules solutions de (e).
Remarque : si on fixe une condition initiale $y(x_0) = y_0$ alors la solution est unique car elle correspond à $k = \dfrac{y_0}{e^{ax_0}}$.

2. Équations du second ordre

Il s'agit d'équations de la forme (e') : $y'' + ay' + by = 0$.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$ appelée équation caractéristique de (e') possède deux racines réelles ou complexes éventuellement égales que je noterai r_1 et r_2.
On vérifie aisément que $x \mapsto y(x) = ke^{r_1 x}$ est solution de (e'). En effet pour tout x, $y'' + ay' + by = kr_1^2 e^{r_1 x} + akr_1 e^{r_1 x} + bke^{r_1 x} = k\left(r_1^2 + ar_1 + b\right)e^{r_1 x} = 0$ puisque r_1 est racine de $r^2 + ar + b = 0$.
Comme précédemment on cherchera alors la solution générale sous la forme $x \mapsto y(x) = k(x)e^{r_1 x}$ où k est une fonction dérivable.
Dans ces conditions :
$y'(x) = k'(x)e^{r_1 x} + k(x)r_1 e^{r_1 x}$ et
$y''(x) = k''(x)e^{r_1 x} + 2k'(x)r_1 e^{r_1 x} + k(x)r_1^2 e^{r_1 x}$.

(e') s'écrit alors :
$k''e^{r_1 x} + 2k'r_1 e^{r_1 x} + kr_1^2 e^{r_1 x} + a\left(k'e^{r_1 x} + kr_1 e^{r_1 x}\right) + bke^{r_1 x} = 0$ ou encore :
$k'' + (2r_1 + a)k' + \left(r_1^2 + ar_1 + b\right)k = 0$ ce qui se réduit finalement à :
$k'' + (2r_1 + a)k' = 0$.

• Si r_1 est racine double de $r^2 + ar + b = 0$ alors $2r_1 + a = 0$ car $r_1 + r_2 = 2r_1 = -a$. L'équation $k'' + (2r_1 + a)k' = 0$ devient dans ces conditions $k'' = 0$ et par suite $k'(x) = \lambda$ et $k(x) = \lambda x + \mu$. D'où :
$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}$.

• Si r_1 est racine simple (éventuellement complexe) alors l'autre racine r_2 vérifie $r_1 + r_2 = -a$. Dans ces conditions $k'' + (2r_1 + a)k' = 0$ est équivalente à $k'' + (r_1 - r_2)k' = 0$. Si on pose $z = k'$ on obtient alors l'équation du premier ordre : $z' + (r_1 - r_2)z = 0$, équation qui a pour solutions $x \mapsto z(x) = \lambda e^{(r_2 - r_1)x}$. k primitive de z s'écrit donc $k(x) = \dfrac{\lambda}{r_2 - r_1}e^{(r_2 - r_1)x} + \mu$ et dans ces conditions :

$$y(x) = \left(\frac{\lambda}{r_2 - r_1}e^{(r_2 - r_1)x} + \mu\right)e^{r_1 x} = \frac{\lambda}{r_2 - r_1}e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x}.$$

D'où :

$$y(x) = \eta e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x} \quad \text{en posant } \eta = \frac{\lambda}{r_2 - r_1}.$$

Remarque : si r_1 et r_2 sont complexes alors r_1 et r_2 sont conjugués. On pose alors $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec α et β réels. Dans ces conditions les solutions $y(x) = \eta e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x}$ pourront s'exprimer sous différentes formes équivalentes :

$$\begin{aligned}y(x) &= \eta e^{(\alpha - i\beta)x} + \mu e^{(\alpha + i\beta)x} \\ y(x) &= \left(\eta_1 \sin(\beta x) + \mu_1 \cos(\beta x)\right)e^{\alpha x} \\ y(x) &= \left(\eta_2 \cos(\beta x + \varphi)\right)e^{\alpha x}.\end{aligned}$$